

## ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

Marco Antonio Pérez Cisneros\*, Elke Laubwald<sup>+</sup> y Mark Readman<sup>+</sup>

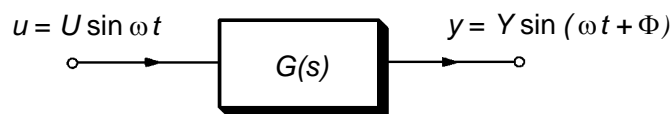
\*División de Electrónica y Computación, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México.

<sup>+</sup>Consultores “Control Systems Principles”

**RESUMEN:** Este artículo pertenece a la serie de notas de aplicación en modelado y control de sistemas que han sido creadas por “Control Systems Principles” para ilustrar los principios básicos de la teoría de control. Dichos fundamentos incluyen algunos sistemas genéricos y métodos que son comunes en muchas áreas del desarrollo tecnológico y la industria. Estas notas de aplicación buscan explicar dichos sistemas y sus principios de una manera clara y fácil de entender. Por tanto las notas describen primero las características más importantes de un sistema, como funciona y finalmente como puede ser controlado. Diferentes sistemas en tiempo real son utilizados para demostrar la viabilidad de los algoritmos de control. Dichos sistemas han sido diseñados por nuestro fundador Prof. Peter Wellstead y son manufacturados por “TQ Education & Training Ltd” bajo la línea CE. Cuando es posible, las notas de aplicación incluyen también los resultados de los experimentos utilizando estos sistemas. En particular esta nota describe la importante y popular técnica del análisis de la respuesta en frecuencia utilizando la herramienta de simulación y control CE2000 para demostrar la operación del método y su implementación.

### 1. ¿Que es el análisis de respuesta en frecuencia y por que es tan importante?

Cuando deseamos utilizar o controlar un sistema real, lo primero que debemos conocer es como se comporta si se aplican diferentes señales de entrada. Esto constituye una medición de la respuesta dinámica del sistema. Una manera para encontrar la respuesta del sistema es aplicar una señal de prueba a la entrada y observar la salida del sistema. Aunque es posible utilizar diferentes señales, una entrada senoidal es simple y muy útil como señal de prueba por que generalmente la respuesta del sistema es también una señal senoidal pero con una amplitud y fase diferentes a la señal de entrada. El análisis de la respuesta en frecuencia es una versión especial de la respuesta dinámica del sistema y consiste en analizar la salida del sistema en términos de amplitud y fase cuando distintas señales de entrada senoidal se aplican al sistema.



**Figura 1. Función de transferencia lineal con una entrada senoidal.**

Si el sistema tiene una función de transferencia  $G(s)$ , entonces la respuesta de salida para una frecuencia  $\omega = 2\pi f$  será dada por la ganancia y la fase de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$  en la frecuencia dada  $\omega$ . Para el sistema que se muestra en la figura 1, las señales de entrada y salida (después de que los transitorios han pasado) son:

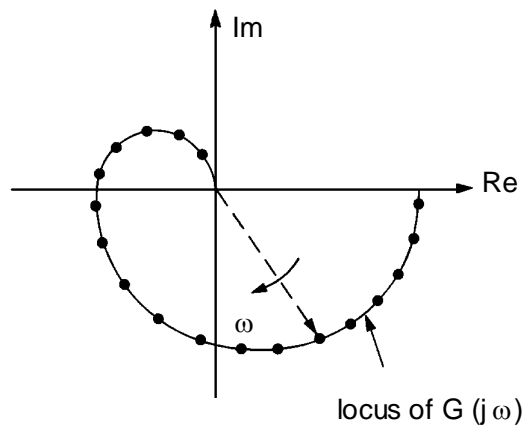
$$u(t) = U \sin(\omega t), \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

La correspondiente ganancia y fase son dados por:

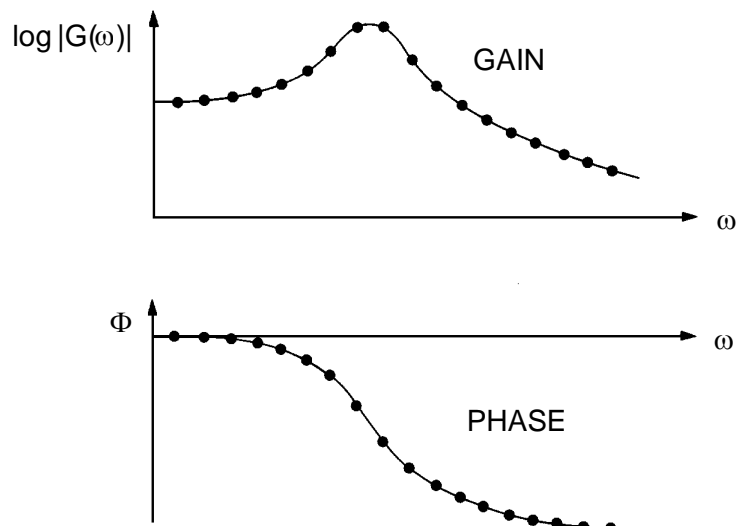
$$\text{Ganancia en } \omega = |G(j\omega)| = \frac{Y}{U}, \quad \text{Fase en } \omega = \angle G(j\omega) = \phi \quad (2)$$

Midiendo la ganancia y la fase sobre un rango de frecuencias, la respuesta a la frecuencia total del sistema puede ser graficada de nuevo.

La figura 2 muestra las mediciones de la respuesta típica en frecuencia, graficada en dos formas. La primera es un diagrama de la parte imaginaria ( $\text{Im}$  en la figura 2a) de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$  con respecto de la parte real ( $\text{Re}$  en la figura 2a) de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$ . El segundo diagrama en la figura 2b muestra un trazo del logaritmo de la ganancia en la respuesta en frecuencia ( $\log|G(j\omega)|$  en la figura 2b) y la fase ( $\Phi(j\omega)$  en la figura 2b). Las dos figuras se conocen como la grafica de Nyquist y Bode respectivamente y representan caminos alternativos para presentar las mediciones. Toman su nombre de los apellidos de dos grandes ingenieros-matemáticos que sentaron las bases para el análisis de sistemas de control en el dominio de la frecuencia.



**Figura 2a. Presentación de datos de la respuesta en frecuencia: diagrama de Nyquist.**



**Figura 2b. Presentación de datos de la respuesta en frecuencia: diagrama de Bode.**

Los diagramas de Nyquist y Bode son muy útiles para el ingeniero de control por distintas razones:

1. Determinan la respuesta del sistema para diferentes frecuencias.
2. Definen las propiedades de la estabilidad del sistema en control de lazo cerrado.

3. Permite el diseño de controladores de compensación para alcanzar la respuesta deseada en lazo cerrado.

Estas son las razones principales por las cuales el análisis de la respuesta en frecuencia es muy importante. Especialmente, las mediciones de respuesta en frecuencia pueden ser usadas para cuantificar directamente el rendimiento del sistema y *directamente* diseñar el controlador requerido. Esto es un avance muy significativo para los métodos de identificación de sistemas por que la mayoría de métodos para identificar la dinámica de un sistema a partir de datos de entrada y salida no pueden ser usados directamente para el análisis y diseño. Típicamente se requiere extra procesamiento y manipulación de los datos antes de que puedan ser usados. Con la respuesta en frecuencia tenemos exactamente lo que necesitamos.

El análisis de la respuesta en frecuencia es también muy útil por que la señal senoidal es una señal de prueba muy conocida que tiene algunas propiedades muy importantes:

- Solamente se utiliza una frecuencia cada vez y la amplitud de la senoidal puede cambiarse para cada frecuencia. Esto significa que si el sistema tiene una fuerte resonancia en ciertos valores de frecuencia, la amplitud de entrada puede ser reducida para prevenir cualquier daño al sistema. De la misma forma, si el sistema tiene una ganancia muy pequeña en cierto rango de frecuencias entonces es posible incrementar la amplitud de la señal de prueba.
- El método es muy selectivo con respecto a la frecuencia por lo cual puede rechazar ruido en la entrada excelentemente y de forma controlable.
- La última propiedad es muy técnica. Cuando el sistema tiene elementos no lineales, el análisis de respuesta en frecuencia mide la llamada *Función Descriptiva* del sistema. Existen algunas técnicas de diseño de controladores que usan este concepto. Otras señales de prueba distintas a la señal senoidal exhiben problemas con las no linealidades en el sistema por lo que se requieren técnicas especiales para cada caso.

Existen algunas desventajas también. El análisis de respuesta en frecuencia no es recomendado para los siguientes casos:

- Si el sistema tiene una dinámica muy lenta. En este caso las señales de prueba tendrán que ser de muy bajas frecuencias y el tiempo total de prueba será muy largo. (Existen algunas otras alternativas para este caso que se comentan en otras notas de aplicación.)
- Dado que el análisis se realiza en cada valor de frecuencia, el tiempo total para realizar el análisis puede ser muy largo y existe la posibilidad de perder alguna de las características de respuesta importante como resultado de utilizar un espacio muy grande entre las distintas frecuencias de prueba.

También es importante que el análisis de respuesta en frecuencia es considerado como pasado de moda por algunos investigadores. En algunos lugares ni siquiera se enseña en los cursos de dinámica de sistemas. Ciertamente se desarrollo muchos años atrás, pero para el ingeniero de control en la vida real, es una herramienta muy valiosa y practica para encontrar un buen diseño, por lo que cada ingeniero de control y procesado de señales debe conocerla.

## 2. Calculando la respuesta en frecuencia.

La amplitud y la fase de la señal de salida  $y(t)$  con respecto de la señal de entrada  $u(t)$  que puede ser definida midiendo las señales con un osciloscopio. Esta técnica no es muy exacta y es difícil de implementar, especialmente cuando hay mucho ruido y distorsiones no lineales en la salida. La mejor manera de hacer el trabajo es usar un método de correlación que multiplica la salida por una señal senoidal y una señal co-senoidal y luego integrar los productos en un tiempo determinado, digamos  $T$  segundos. La idea es observar cuanta energía existe en la frecuencia de interés. Esto se le conoce como el análisis de la correlación de la respuesta en frecuencia y opera como sigue:

Para una señal de entrada  $u(t) = U \sin(\omega t)$ , la señal de salida en estado estable  $y(t)$  del sistema<sup>1</sup> es:

$$y(t) = U|G(j\omega)|\sin(\omega t + \phi)$$

Si la salida es multiplicada por  $\sin(\omega t)$  e integrada sobre un periodo de  $T$  segundos, entonces:

$$R(T) = \frac{U}{T}|G(j\omega)|\int_0^T \sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi)dt$$

Para valores específicos en el tiempo de integración, esta ecuación resulta en una medición de la parte real de la respuesta en frecuencia del sistema para una frecuencia dada  $\omega$ . En particular para  $T = \frac{N\pi}{\omega}$ ,  $N = 1,2,3,\dots$  la señal  $R(T)$  es:

$$R(T) = \frac{U}{2}|G(j\omega)|\cos\phi \quad (3)$$

Multiplicando la señal  $R(T)$  por dos y dividiendo por  $U$  obtenemos  $|G(j\omega)|\cos\phi$ , el cual es la parte real de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$ .

Si la salida se multiplica por  $\cos(\omega t)$  y se integra sobre un periodo de  $T$  segundos, entonces resulta en:

$$I(T) = \frac{U}{T}|G(j\omega)|\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t + \phi)dt$$

Para  $T = \frac{N\pi}{\omega}$ ,  $N = 1,2,3,\dots$  la señal  $I(T)$  es:

$$I(T) = \frac{U}{2}|G(j\omega)|\sin\phi \quad (4)$$

Multiplicando la señal  $I(T)$  por 2 y dividiendo entre  $U$ , obtenemos  $|G(j\omega)|\sin\phi$ , que es la parte imaginaria de la respuesta en frecuencia  $G(j\omega)$ .

La ganancia y la fase de la respuesta en frecuencia son calculadas usando las ecuaciones normales:

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{U}\sqrt{I(T)^2 + R(T)^2}, \quad \angle G(j\omega) = \phi = \arctan\left(\frac{I(T)}{R(T)}\right)$$

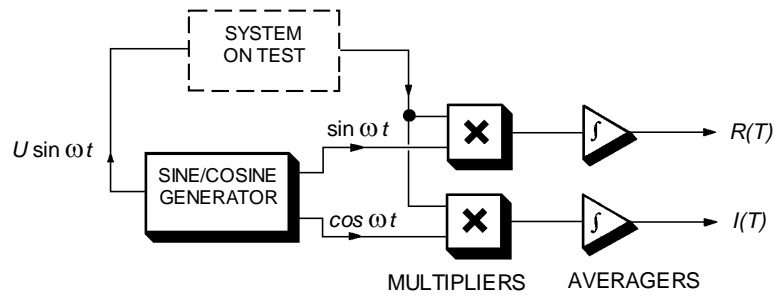
### 3. Implementación de un analizador de correlación para la respuesta en frecuencia.

La función de respuesta en frecuencia se obtiene de  $R(T)$  y  $I(T)$  calculando estos valores para cada valor de  $T$ . En la práctica, los valores de  $T$  que se utilizan son los ciclos completos de la frecuencia de prueba.

$$T = N\frac{2\pi}{\omega}, \quad N = 1,2,3,\dots \quad (5)$$

Esta elección de  $T$  reduce la influencia de las no linealidades en el sistema y elimina la distorsión de cualquier valor agregado ("offset") en la salida del sistema. Las funciones  $R(T)$  y  $I(T)$  pueden ser calculadas usando el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3.

<sup>1</sup> Esto es muy fácil demostrar expandiendo la respuesta con relación a sus singularidades y usando el teorema de Heavside.

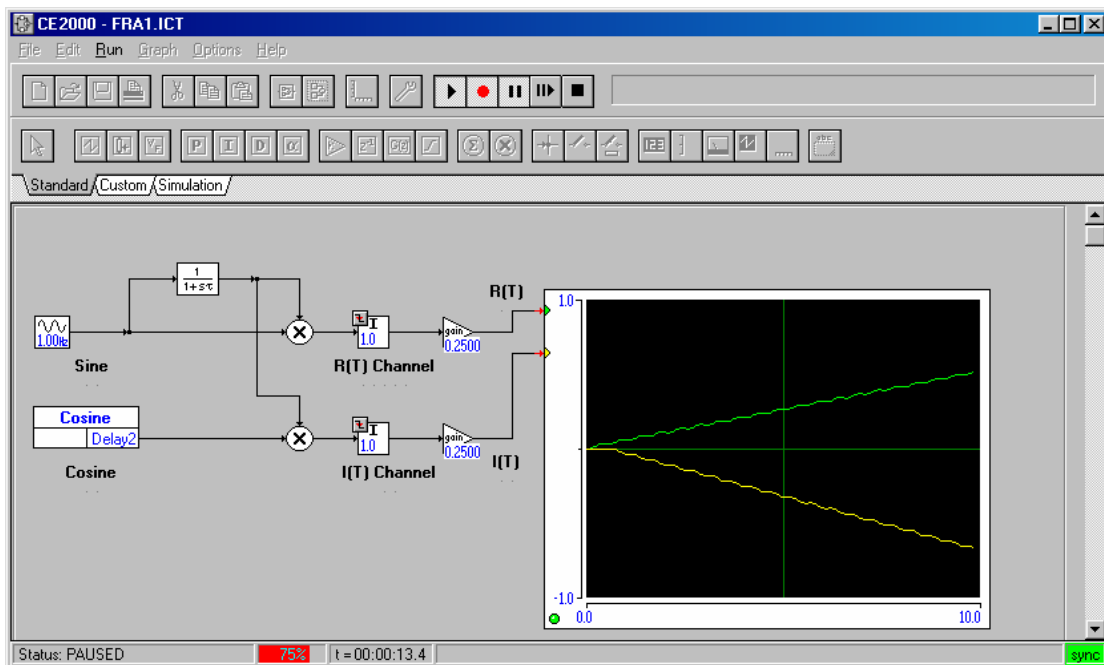


**Figura 3. Diagrama de bloques del analizador de correlación para la respuesta en frecuencia.**

Del diagrama de bloques es muy fácil construir el analizador de correlación (FRA) utilizando un sistema gráfico de simulación y control en tiempo real de sistemas dinámicos. Esto se ilustra enseguida utilizando el paquete de control en tiempo real y simulación CE2000.

#### 4. Implementando la simulación con CE2000

La demostración es un analizador de correlación para la respuesta en frecuencia construido de los bloques provistos dentro de la paleta de iconos de CE2000. La figura 4 muestra el modelo en CE2000 con un sistema simulado de primer orden. Con una amplitud senoidal de  $U = 1$ , y el tiempo  $T$  dado por la ecuación (5), se espera que  $2 * R(T)$  y  $2 * I(T)$  sean las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia, del sistema operando en la frecuencia de prueba seleccionada. Con un sistema de primer orden  $G(s)$ , ganancia unitaria y la constante de tiempo igual  $\tau = \frac{1}{2\pi}$ , la respuesta en frecuencia en  $\omega = 2\pi$  viene dada por:  $G(j2\pi) = 0.5 - j0.5$



**Figura 4. Implementación en CE2000 de una correlación FRA**

La figura 4 muestra un gráfico de  $R(T)$  y  $I(T)$  que se ha obtenido del modelo en CE2000 y ha sido pre-configurado para dar el valor correcto en 4 ciclos de la frecuencia de prueba. Nota que los valores en 4

segundos corresponden aproximadamente a la mitad de los valores teóricos como se esperaba. Los valores son aproximados por que en la implementación básica que se muestra en la figura 4, no se ha permitido que la salida del sistema alcance el estado permanente. Entonces las mediciones son influenciadas por las condiciones iniciales. Además la integración numérica necesita ser diseñada apropiadamente en correlación con los métodos del análisis de respuesta en frecuencia. Normalmente se utiliza un hardware dedicado o instrumentos virtuales para obtener mediciones precisas de la respuesta a la frecuencia sobre un rango determinado de frecuencias.

## 5. Comentarios finales

Esperamos que nuestra exposición acerca de los métodos de análisis de respuesta en frecuencia haya sido clara y entendible. Pedimos disculpas por adelantado por que no podemos contestar tus preguntas o dudas sobre detalles en el contenido de estas notas a menos de que tengamos un acuerdo con tu organización. Para más información sobre los métodos de análisis de respuesta en frecuencia, consulta la pagina de Internet de TQ, utiliza las ligas de interés en nuestro sitio Web [www.control-systems-principles.co.uk](http://www.control-systems-principles.co.uk), o escribe directamente a TQ en el correo electrónico: [info@tq.com](mailto:info@tq.com). Mas información sobre el CE2000 software para simulación y control consulta “Control and Simulation Software” en la pagina de Internet de TQ. Existen muchas referencias y libros que utilizan el análisis de respuesta en frecuencia aunque muchos no explican como realizar las mediciones. Nosotros recomendamos que leas las notas escritas por el Prof. Wellstead, nuestro fundador, acerca del análisis de respuesta en frecuencias que podrás encontrar en entre los documentos de la pagina Web de “control systems principles”.

## 6. Referencias

1. P.E. Wellstead, *Frequency Response Analysis*, Report 010/83, Solartron Instruments