

SISTEMA DE PELOTA Y ARO: DISEÑO DEL CONTROLADOR.

Marco Antonio Pérez Cisneros^{*}, Mark Readman⁺ y Peter Wellstead⁺

^{*}División de Electrónica y Computación, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México.

⁺Control Systems Principles

RESUMEN: Este artículo pertenece a la serie de notas de aplicación en modelado y control de sistemas que han sido creadas por “Control Systems Principles” para ilustrar los principios básicos de la teoría de control. Dichos fundamentos incluyen algunos sistemas genéricos y métodos que son comunes en muchas áreas del desarrollo tecnológico y la industria. Estas notas de aplicación buscan explicar dichos sistemas y sus principios de una manera clara y fácil de entender. Por tanto las notas describen primero las características más importantes de un sistema, como funciona y finalmente como puede ser controlado. Diferentes sistemas en tiempo real son utilizados para demostrar la viabilidad de los algoritmos de control. Dichos sistemas han sido diseñados por nuestro fundador Prof. Peter Wellstead y son manufacturados por “TQ Education & Training Ltd” bajo la línea CE. Cuando es posible, las notas de aplicación incluyen también los resultados de los experimentos utilizando estos sistemas. Esta nota de aplicación describe el control del sistema de Pelota y Aro por lo que debe leerse en conjunción con la primera nota de aplicación en esta serie que discute sobre la dinámica oscilante de este problema y su relación con procesos de fase no-mínima.

1. ¿Que se explica en estas notas?

La primera nota de aplicación sobre el sistema de pelota y aro no contiene ningún ejemplo del diseño del controlador o de su rendimiento dinámico. Esta nota de aplicación ha sido escrita para complementar esta omisión y ofrecer una discusión más completa sobre este sistema. Por lo tanto esta nota muestra algunas características del rendimiento dinámico que pueden ser demostradas mediante el sistema de pelota y aro. También se incluye una demostración simple del controlador de inclinación/agitación mediante retroalimentación. Algunos métodos más sofisticados de control para el sistema de pelota y aro serán incluidos en futuras notas de aplicación.

2. El sistema de pelota y aro.

Retomando lo discutido en la primera nota de aplicación, este sistema es análogo al sistema de inclinación/agitación que ocurre cuando se transporta líquidos, ya sea dentro de contenedores o en forma de combustible. El movimiento de la pelota en la parte interior de la periferia del aro reproduce las oscilaciones de los fluidos en tanques o contenedores durante el transporte de los mismos. El sistema de pelota y aro es también adecuado para demostrar algunos conceptos básicos de la dinámica de sistemas y teoría de control, como por ejemplo los ceros del sistema y los sistemas de fase mínima.

La figura 1 muestra el sistema CE109, manufacturado por TQ, que es un entrenador del sistema de pelota y aro. Los principales elementos en su construcción son:

1. Un aro que puede rotar con una pelota de acero en su periferia interior. (El disco negro en el centro de la figura es el aro).
2. Un motor servo, M que puede manejar el aro y controlar el ángulo de inclinación mediante su torque $\tau(t)$.
3. Un sensor del ángulo del aro θ . (La flecha blanca pintada sobre el disco negro es una indicación visual de dicho ángulo).

4. Un sensor para el ángulo de la pelota en el aro, en otras palabras, el ángulo de la inclinación ψ . (El puntero negro que señala hacia abajo es una indicación visual del ángulo de la pelota).

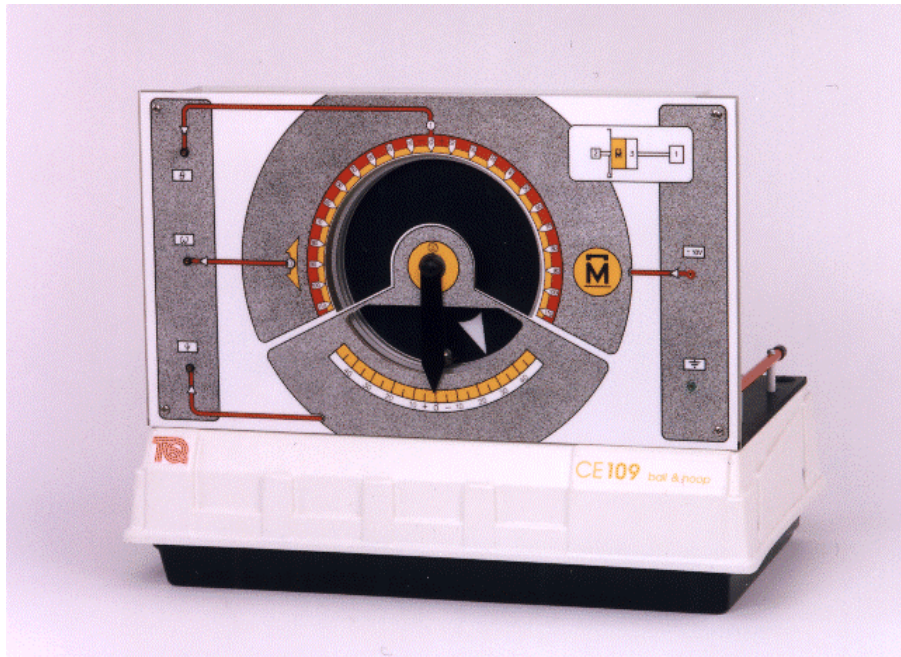


Figura 1. El sistema de pelota y aro CE109.

3. El modelo del sistema de pelota y aro.

El modelo dinámico del sistema de pelota y aro se ha derivado en la primera nota de aplicación en esta serie. Aquí solamente se utiliza las variables que se utilizaron en los modelos finales en dicha nota. (Es muy recomendable que revise la primera nota de aplicación para comprender mejor los conceptos acerca del algoritmo de control).

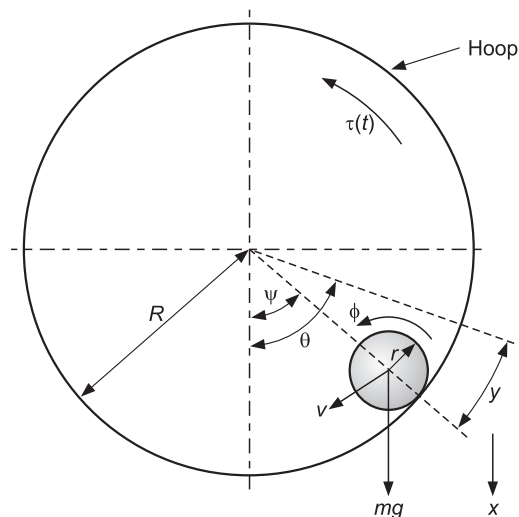


Figura 2. Representación esquemática del sistema de pelota y aro

La figura 2 muestra una representación esquemática del sistema de pelota y aro, donde las variables más importantes son:

El radio del aro: R .

El radio de la pelota: r .

La masa de la pelota: m .

El ángulo del aro: θ

El ángulo de la pelota con respecto de la vertical (ángulo de inclinación/agitación): ψ .

La posición de la pelota en el aro: y .

El torque de entrada al aro: $\tau(t)$.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son:

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & \frac{-m(R-r)^2}{R} \\ \frac{-m(R-r)^2}{R} & \frac{I_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} (R-r)\sin(\theta - \frac{y}{R}) \\ -\left(\frac{R-r}{R}\right)\sin(\theta - \frac{y}{R}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ecuaciones del modelo diferencial linealizado.

Asumiendo que el ángulo de inclinación $\psi = \left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ es relativamente pequeño, podemos reemplazar

$\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ por $\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ para definir una ecuación matricial de segundo orden de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & \frac{-m(R-r)^2}{R} \\ \frac{-m(R-r)^2}{R} & \frac{I_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} (R-r) & -\left(\frac{R-r}{R}\right) \\ -\left(\frac{R-r}{R}\right) & \frac{R-r}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Modelo lineal en variable de estado.

La ecuación (2) es una forma específica de la ecuación:

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = Bu \quad (3)$$

Esta es la forma general usada frecuentemente en robótica para formular claramente las ecuaciones diferenciales del sistema. Es un camino conveniente también para formular las ecuaciones del sistema en variable de estado. Específicamente si utilizamos $X = \left(\theta \quad y\right)^T$ y $X_1 = X$, $X_2 = \dot{X}$, la expresión (2) puede expresarse en ecuaciones de estado como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix} u$$

$$Y = C \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La elección de la matriz de salida C dependerá en los estados que se miden.

Aproximaciones y sustituciones.

Debido a que el radio del aro es mucho más grande que el radio de la pelota $R \gg r$, la ecuación (2) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & \frac{I_b}{r^2} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Considera que el momento de inercia de una pelota sólida es $I_b = \frac{2}{5}mr_b^2$, y que el radio de la pelota es distinto al radio de rodado, por lo que las ecuaciones pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & m\left(\frac{2r_b^2}{5r^2} + 1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \frac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Las ecuaciones matriciales diferenciales pueden separarse en ocasiones. En este caso, si el torque inercial de la pelota m , es pequeño comparado con el del aro y el torque del motor, entonces la primera ecuación en (6) puede ser escrita como la conocida ecuación diferencial para un motor de DC con una carga inercial I_a y fricción viscosa b_m :

$$I_a \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} = \tau(t) \quad (7)$$

y la segunda ecuación en (6) es:

$$\left(\frac{2r_b^2}{5r^2} + 1\right) \ddot{y} + \frac{b_b}{mr^2} \dot{y} + \frac{g}{R} y = R \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta\right) \quad (8)$$

Las dos ecuaciones diferenciales que han sido separadas son muy útiles por que nos permiten escribir el modelo del sistema como dos funciones de transferencia en cascada, donde en la primera función de transferencia el torque del motor produce un ángulo del aro y en el segunda función de transferencia dicho ángulo del aro produce una posición para la pelota. Estas ideas son muy útiles para diseñar un modelo de simulación y los controladores requeridos.

4. Características interesantes de la dinámica del sistema de pelota y aro.

Dos características especiales del sistema de pelota y aro son su conveniencia para demostrar los “ceros de transmisión” y el comportamiento de fase no-mínima.

Ceros de transmisión.

Si la ecuación (8) se expresa como una función de transferencia:

$$\frac{y(s)}{\theta(s)} = R \left[\frac{s^2 + \frac{g}{R}}{\left(\frac{2r_b^2}{5r^2} + 1\right)s^2 + \frac{b_b}{mr^2}s + \frac{g}{R}} \right] \quad (9)$$

Entonces es claro que la función de transferencia relacionando el ángulo del aro $\theta(s)$, con la posición de la pelota en el aro $y(s)$ tiene ceros puramente imaginarios en $s = \pm j \frac{g}{R}$. Esos son los “ceros de transmisión”, lo que significa que cuando el ángulo del aro es una señal senoidal de esta frecuencia, la posición de la pelota en la salida es exactamente cero. El modelo del sistema de pelota y aro puede ser

usado para ilustrar esta transmisión cero si se implementa en simulación (aunque la implementación en tiempo real también se muestra en estas notas de aplicación mas tarde).

Utilizando el modelo para MATLAB que se da al final de estas notas podemos demostrar esta transmisión cero. En particular la figura 3 muestra los resultados de una simulación con el ángulo del aro siendo regulado por un controlador de posición y la entrada a dicho controlador es una señal senoidal de 1.8Hz, (aproximadamente esto corresponde al cero de la función de transferencia en la ecuación (9)). La posición de la pelota $y(t)$, el ángulo de inclinación $\psi(t)$ y el ángulo del aro $\theta(t)$ se muestran. Nótese que después de las condiciones iniciales, la señal en el estado estable $y(t)$ decae a casi cero, mientras que otras señales permanecen en valores considerables. Compara esto con la figura 4 que muestra las señales simuladas cuando la entrada de referencia para el controlador de posición del aro es una señal senoidal de 1.5Hz. El tamaño más grande en la señal de posición del aro se debe a la resonancia en la función de transferencia de la ecuación (9) en la región de 1.5Hz. El par muy acoplado de polo/cero en la función de transferencia en ecuación (9) es muy interesante para el analista de sistemas dinámicos. Un buen número de estructuras mecánicas presentan estas mismas características y en la teoría de filtros esto se considera una característica deseable cuando los canales de transmisión están empaquetados muy cerca en términos de frecuencia y los niveles de interferencia entre señales deben de ser bajos.

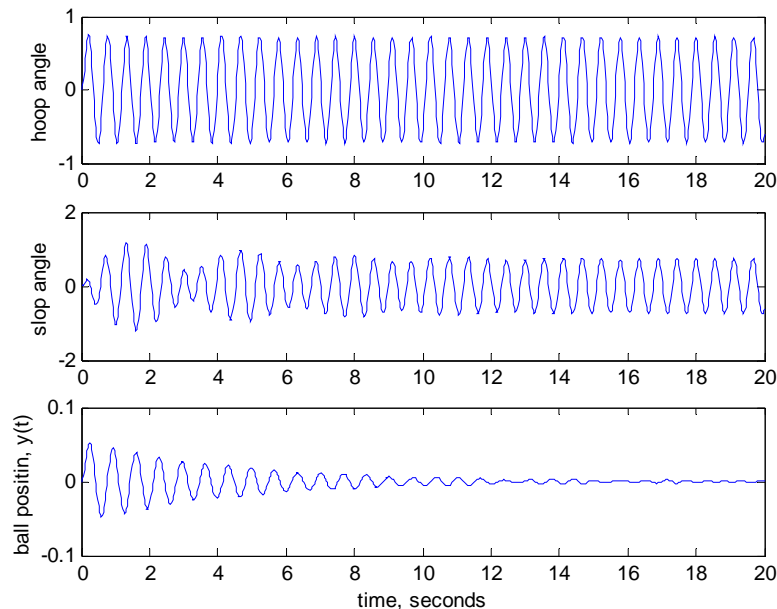


Figura 3: Salidas del sistema de pelota y aro después de la simulación con una excitación senoidal de 1.8Hz

Comportamiento de fase no mínima y ceros de desplazamiento.

Las salidas del sistema de pelota y aro son $\theta(s)$ y $\psi(s)$. De ellas es posible construir la señal $y(s)$ restando las mediciones escaladas de los ángulos del aro y la inclinación. Podemos considerar que la señal de salida sintética $x(s)$ es dada por:

$$x(s) = \theta(s) - k_s \psi(s) \quad (10)$$

Donde:

k_s = Factor escalar de ganancia.

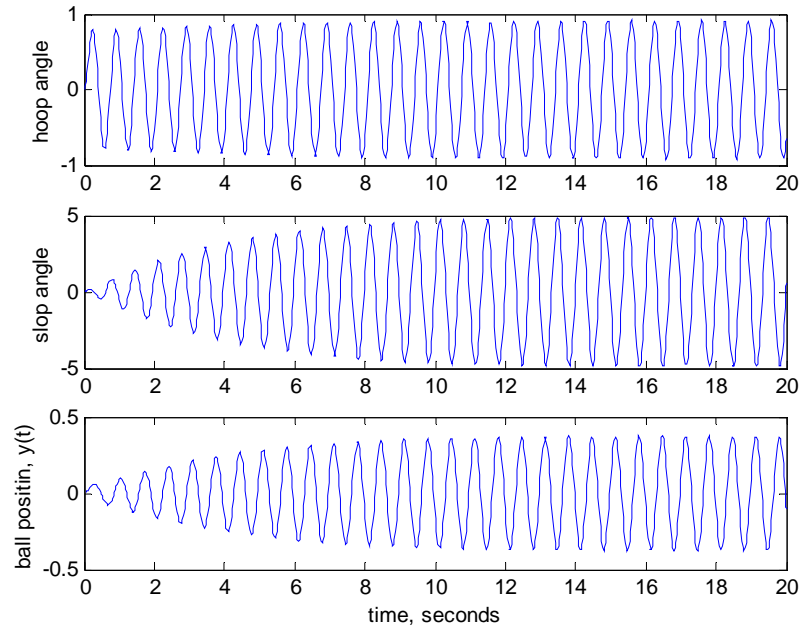


Figura 4: Salidas del sistema de pelota y aro después de la simulación con una excitación senoidal de 1.5Hz.

Nota que cuando k_s es la unidad, $x(s)$ es la variable $\frac{y(s)}{R}$, y esto corresponde a una versión escalada de la posición de la pelota en la periferia del aro. Nota también que la ecuación (10) es una combinación de dos salidas del sistema de tal manera que la entrada tiene dos caminos para la salida $x(s)$. Rescribiendo la ecuación (10) como una función de transferencia tenemos:

$$\frac{x(s)}{\theta(s)} = 1 - k_s \frac{\psi(s)}{\theta(s)}$$

Variando la ganancia k_s , podemos graficar el lugar de raíces de los ceros en la función de transferencia. Para ganancias mayores a la unidad, el lugar de raíces está en el semiplano derecho. Esto significa que el comportamiento de fase no mínima ocurre en el sistema. Esto resulta en la característica de fase no mínima donde la salida va inicialmente en una dirección equivocada al tiempo que señales escalón se aplican a la entrada del sistema. Usando el modelo del sistema de pelota y aro en una simulación MATLAB se puede obtener la respuesta en la figura 5, que muestra como la característica de fase no mínima en la respuesta escalón crece conforme k_s se incrementa.

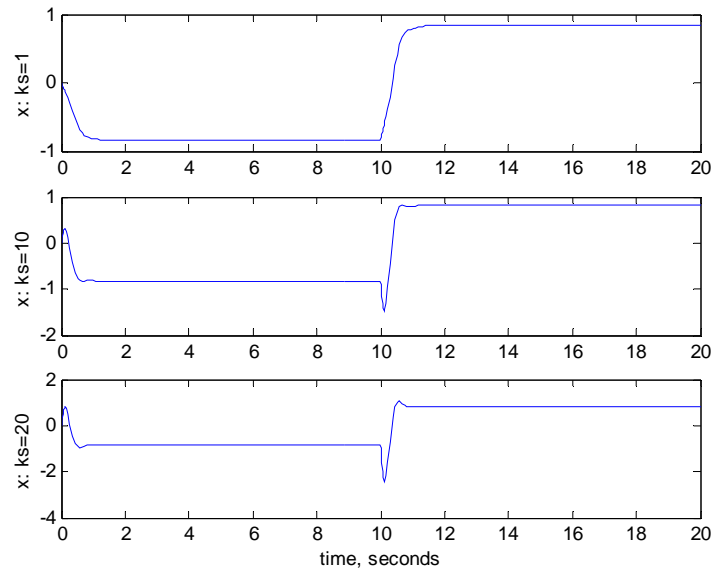


Figura 5. Respuesta al escalón de fase no mínima para la señal $x(s)$ en la ecuación (10).

5. Control de la inclinación

Cuando se hace un cambio de tipo escalón en el ángulo deseado del aro, la pelota puede oscilar antes de establecerse en una nueva posición de descanso exhibiendo cierta inclinación. Retroalimentando el componente k_1 del ángulo de inclinación $\psi(s)$, es posible suprimir las oscilaciones de la pelota y aplicar una forma dinámica de control de la inclinación. De nuevo utilizando la simulación se ha generado la figura 6 que muestra el ángulo de inclinación con y sin la retroalimentación del ángulo hacia el controlador de posición del aro.

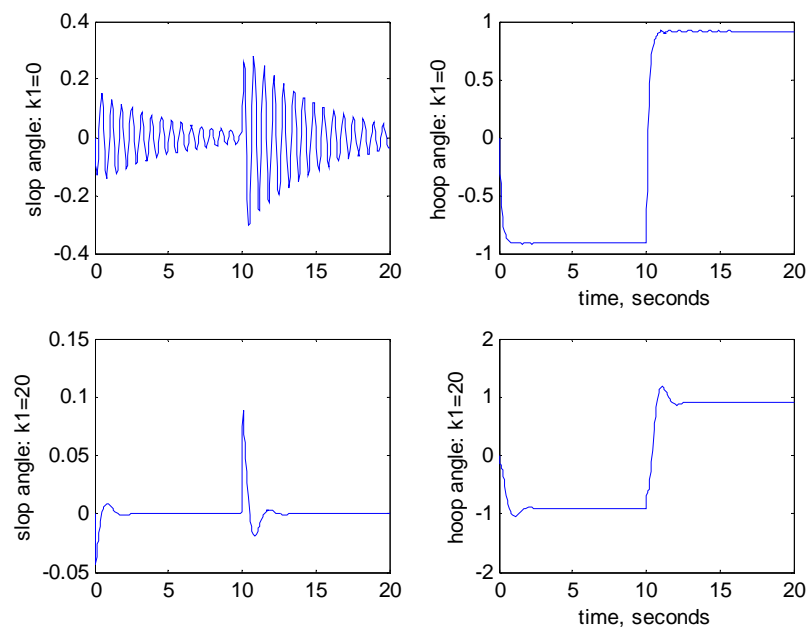


Figura 6. Resultados de la retroalimentación del ángulo de inclinación en simulación.

6. Resultados experimentales utilizando el sistema de entrenamiento CE109

En esta sección te presentamos algunos resultados experimentales que extienden las simulaciones mostradas en secciones previas. Recuerda que una simulación no es una cosa real por lo que los resultados experimentales son muy importantes. En los experimentos hemos usado el sistema de pelota y aro CE109, el software de control en tiempo real CE2000 y la unidad de interfase CE122. No se requiere ningún otro equipo especial. Consulta nuestra pagina Web (www.control-systems-principles.co.uk) donde puedes observar algunos videos con este experimento.

El primer paso es el diseño de un control retroalimentado de posición para el aro. Para esto utilizaremos el modelo lineal que se muestra en el diagrama de la figura 7. Las ganancias para la velocidad y posición han sido ajustadas para una respuesta al escalón adecuada para la posición del aro. Nota que este modelo es esencialmente experimental, por lo que pasa por alto la constante de tiempo eléctrica del motor y otras incertidumbres en la dinámica aro/motor. Las diferentes constantes que se utilizan en el modelo deben ser experimentalmente determinadas para cada planta de pelota y aro en particular. El diagrama a bloques indica los valores máximos de las señales y sus unidades.

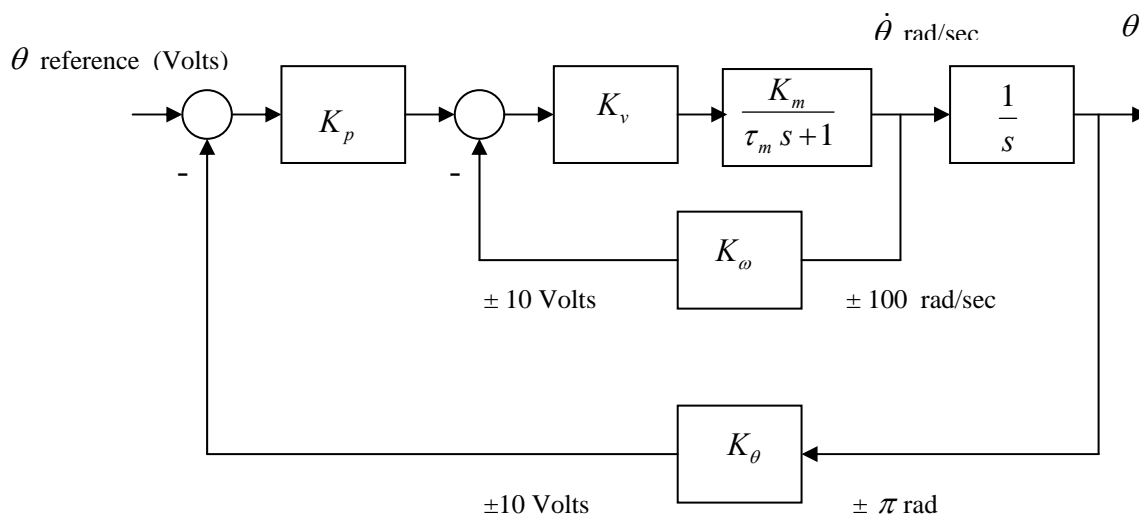


Figura 7. Diagrama a bloques para controlar el ángulo del aro.

Los parámetros usados en la figura 7 son:

K_p = Ganancia del control de posición (0.2)

K_v = Ganancia del control de velocidad (15)

K_m = Ganancia del motor servo (30 rad/seg/Volt)

τ_m = Constante de tiempo del motor servo (1.0 seg)

K_ω = Factor de normalización para la velocidad (0.03 Volts/rad/seg)

K_θ = Factor de normalización para la posición (5.73 Volts/rad)

K_ψ = Ganancia del sensor del ángulo de inclinación (14.32 Volts/radian ó 0.25 Volts/grado)

Los valores nominales de los parámetros determinados de la planta experimental se dan entre corchetes.

Seleccionando K_p y K_v .

K_v y K_p se escogen para que la función de transferencia de lazo cerrado para la posición del aro sea de la forma:

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde

$$\omega_n^2 = \frac{K_p K_m K_v K_\theta}{\tau}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1 + K_m K_v K_\omega}{\tau}$$

De los valores de arriba puede obtenerse la dinámica nominal de lazo cerrado. Por ejemplo, digamos que se requiere $\omega_n = 9$ y $\zeta = 1$ por lo que $K_p = 0.028$ y $K_v = 17$. Nótese que los valores reales serán un poco distintos para cada sistema de pelota y aro. El análisis supone un controlador en tiempo continuo, sin embargo utilizando un tiempo de muestreo de $T_s = 50\text{ms}$ aseguramos estar dentro del ancho de banda del sistema de control. Después de que el sistema de control haya sido probado, los ceros de transmisión, la resonancia y el control de la inclinación pueden ser demostrados.

Ceros de transmisión.

Utilizando los parámetros de nuestro sistema experimental que se utilizaron previamente en la simulación, podemos definir la función de transferencia normalizada del ángulo en el aro con respecto de la señal $y(t)$ (dada previamente en la ecuación 9), tenemos:

$$\frac{y(s)}{\theta(s)} = \frac{0.665(s^2 + 129.2)}{s^2 + 0.512s + 86.07}$$

El gráfico de magnitud para esta función de transferencia se muestra en la figura 8. Este trazo muestra una transmisión cero que ocurre en 1.8Hz y un pico resonante en 1.47Hz. Nota que la frecuencia cero es un poco más grande que la frecuencia natural de la pelota en el aro como lo predijo la ecuación 9.

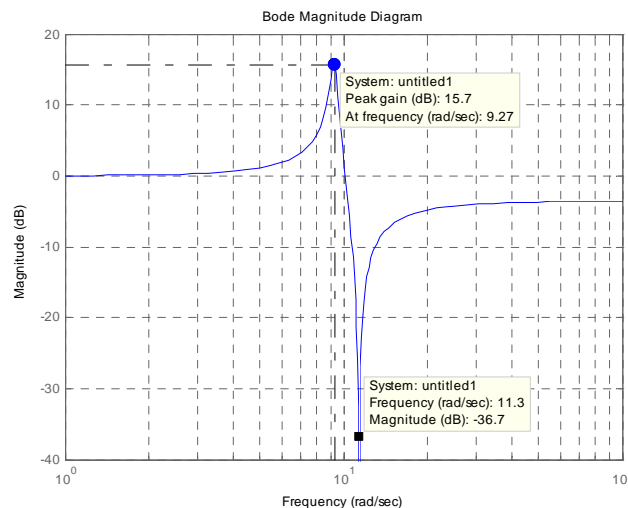


Figura 8. Grafica de la ganancia en la respuesta en frecuencia de la Ecuación 9 usando los parámetros reales del sistema de aro y pelota. El gráfico también muestra los ceros de transmisión y la resonancia.

En la transmisión cero, la salida en estado estable de $y(t)$ para una senoidal será cero. Físicamente esto ocurre cuando no hay un movimiento relativo entre la pelota y el aro que pueda ser observado visualmente. La posición de referencia del aro se establece para una onda senoidal de 1.8Hz con una amplitud de 1.0 y se permite al sistema alcanzar el estado estable. En un sistema práctico, la frecuencia de referencia debe ser ajustada finamente para encontrar exactamente la frecuencia cero. En la frecuencia de transmisión cero, la pelota y el aro estarán sincronizados. Ocasionalmente, debido a disturbios externos, un transitorio ocurrirá causando que la pelota y el aro salgan temporalmente de sincronía. Después de algún tiempo, la pelota y el aro retomarán la sincronía. La señal

$$y(t) = \theta(t) - k_s \psi(t)$$

descrita en el texto, se construye de las salidas de los sensores de ángulo del aro y de inclinación. Cuando el sistema se ajusta correctamente, los voltajes de los ángulos del aro y de inclinación serán de amplitud constante. En el sistema CE109, dichos voltajes tienen una componente de DC que debe ser sustraída antes de que la señal $y(t)$ es formada. Las señales se muestran en la grabadora de gráficos en el software CE2000 y se llevan a cero gráficamente. Para encontrar el valor correcto de k , si $y(t) = 0$ entonces $\theta(t) = k_s \psi(t)$. Esto permite definir un valor aproximado de k . En el caso de nuestro sistema dicho valor es $k=0.225$. La respuesta transitoria para una señal senoidal se muestra en la figura 9. Solamente en simulación, la salida cae a cero conforme la pelota y el aro se sincronizan. A primera vista, dicho resultado parece contra intuitivo. Podría esperarse que dicho cero ocurriera en la frecuencia natural de la pelota, lo que permanece como una pregunta abierta. ¿Por que las oscilaciones en el sistema de pelota y aro se sincronizan a una frecuencia mas grande que la frecuencia natural de oscilación en la pelota?

Resonancia

La frecuencia de referencia del ángulo del aro se reduce ahora a 1.5Hz. Puede ser necesario reducir la amplitud a 0.5 volts. Esto evita que la amplitud de la pelota llegue a ser muy grande, recuerda que estamos manejando un sistema dinámico no amortiguado que opera muy de cerca de su frecuencia resonante. Cuando el estado estable ha sido alcanzado, los ángulos de la pelota y el aro deberán exhibir una amplitud constante. Sin embargo, el sistema de pelota y aro no será sincronizado de aquí en adelante. El dibujo de $y(t)$ en este caso se muestra en la figura 9b.

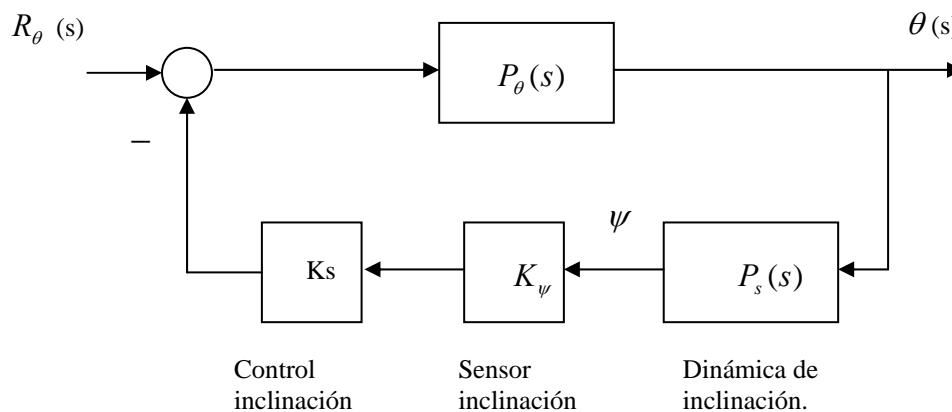


Figura 10. Sistema de control para el ángulo de inclinación.

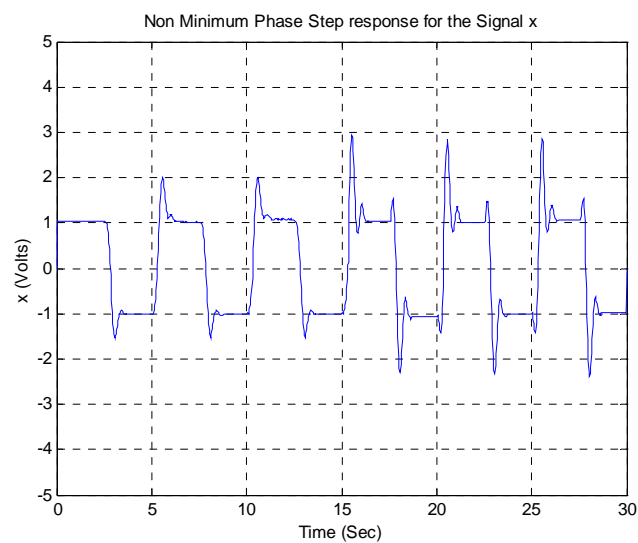
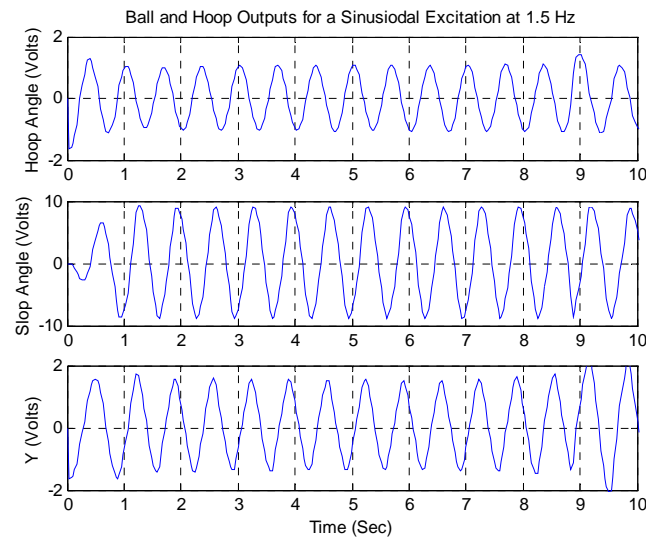
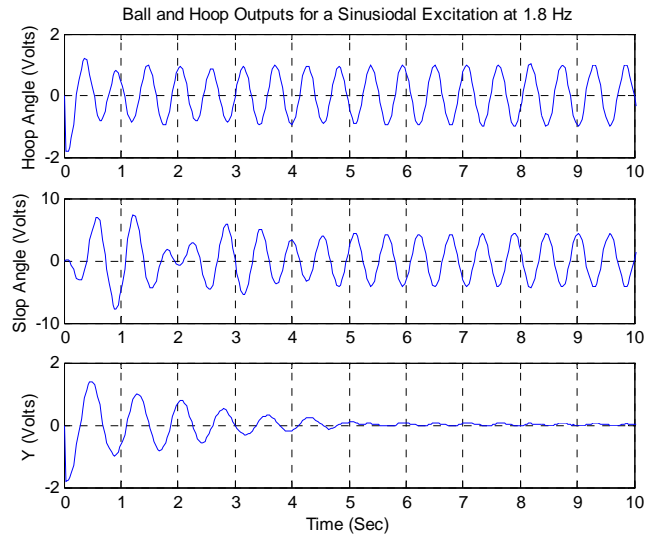


Figura 9. a) Cero transmisión en 1.8 Hz: b) Polo resonante en 1.5 Hz: c) Respuesta de fase no mínima.

Ceros de fase no mínima.

La ecuación 10, que se repite aquí es:

$$x(s) = \theta(s) - k_s \psi(s)$$

Variando el valor de k_s , el comportamiento de no fase mínima puede ser demostrado. Esto se ha graficado en la figura 9c. El valor de k_s se incrementa demostrando una respuesta característica de un sistema con ceros de no-mínima fase.

Control de inclinación: un compromiso clásico en ingeniería.

Para demostrar el control de inclinación, primero colocamos un lazo de retroalimentación de la posición alrededor del aro. Adicionalmente el ángulo de inclinación también se retroalimenta utilizando un controlador proporcional. Para explicar el porque esto trabaja, considera sistema de retroalimentación que se presenta en la figura 10, donde:

$$P_\theta(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$P_s(s) = \frac{0.334s(s+1.532)}{s^2 + 0.667s + 87}$$

y K_s es la ganancia del controlador de inclinación. El lazo hacia delante del sistema retroalimentado de arriba es solamente la dinámica de lazo cerrado del ángulo en el aro. Dicho ángulo afecta la dinámica de la inclinación. El ángulo de inclinación se retroalimenta mediante el lazo negativo hacia la señal de referencia del ángulo del aro. Nótese que el ángulo de inclinación en el estado estable es cero, de tal forma que el ángulo del aro seguirá una referencia constante. El siguiente paso es escoger una ganancia de retroalimentación para el ángulo de inclinación, lo cual representa una negociación clásica en ingeniería. Requerimos que el ángulo del aro responda rápidamente a un comando escalón sin causar un movimiento considerable en la posición de la pelota. En este contexto, el sistema de pelota y aro puede verse como un sistema simple de una entrada y dos salidas (SITO, de sus siglas en ingles). El controlador deberá mover el aro rápidamente y al mismo tiempo deberá minimizar la desviación de cero en la posición de la pelota.

Se permite entonces escoger la dinámica de lazo cerrado para el aro y la ganancia del controlador del ángulo de inclinación. La simulación de este sistema sugiere utilizar $\zeta = 1.0$ y ω_n como la frecuencia natural de la pelota. Esto colocara los polos dominantes de lazo cerrado en la dinámica del aro sobre el eje real en $\pm \omega_n$. Si K_s es cero no habrá señal de control de la inclinación y el movimiento de la pelota no esta amortiguado. El ángulo de lazo cerrado del aro no será afectado. Sin embargo, conforme K_s se incrementa, el aro será forzado a moverse cada vez más lento para mantener la desviación del ángulo de inclinación tan pequeña como sea posible. Esto puede entenderse mejor examinando el lugar de raíces del sistema de arriba conforme variamos la ganancia K_s . Entonces se elige una ganancia de control de manera que la parte real de los dos juegos de polos complejos sea igual. Para ganancias mayores la dinámica de aro domina la respuesta de lazo cerrado. Para ganancias pequeñas la dinámica de la pelota domina la respuesta de lazo cerrado. Esto se ilustra en la simulación y el lugar de raíces que se presenta abajo en las Figuras 11 y 12. Para una ganancia de controlador pequeña, la pelota esta ligeramente amortiguada mientras que la respuesta del aro es muy rápida. Para valores grandes, la posición de aro es SLUGGISH. Entonces un valor intermedio para la ganancia del controlador tiene que seleccionarse como un compromiso entre los dos extremos. Una ganancia de control de $K=0.4$ es un buen compromiso que resulta en el lugar de raíces que se muestra en el diagrama de abajo.

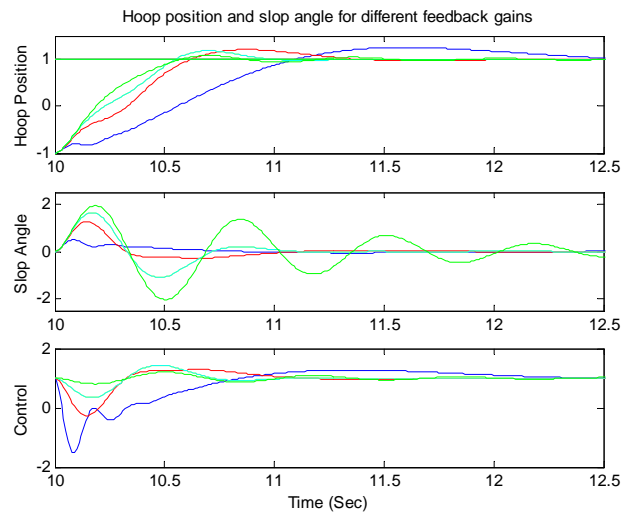


Figura 11. Simulación del control del ángulo de inclinación.

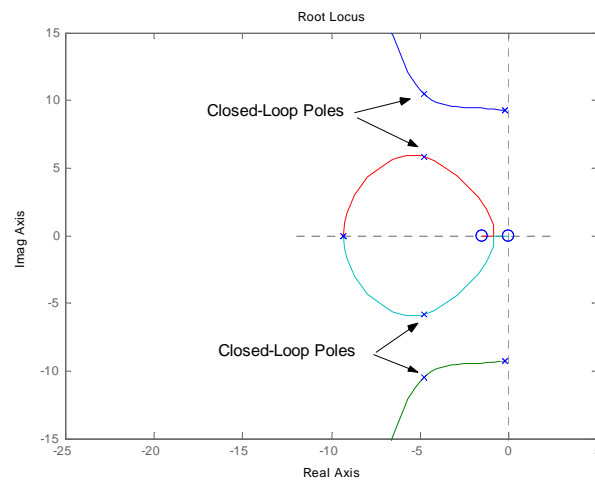


Figura 12. Lugar de raíces con la posición óptima de los polos de lazo cerrado.

Los resultados experimentales fueron obtenidos del sistema de Pelota y Aro TQ CE109 que se muestra en la Figura 13. Claramente el control de la inclinación tiene un efecto muy considerable en el amortiguamiento de la pelota y el ángulo del aro exhibe una respuesta mas lenta tal y como fue predicho por la teoría.

Dinámica de lazo cerrado.

La dinámica de lazo cerrado de la posición de referencia del aro con respecto de la posición del aro se calcula mediante:

$$\frac{\theta(s)}{R_\theta(s)} = \frac{88.83(s^2 + 0.507s + 86.34)}{s^2 + 9.673s + 59.64(s^2 + 9.648s + 128.6)}$$

De donde es posible definir los ceros de lazo cerrado y los polos de la dinámica del ángulo de inclinación. Así mismo se puede apreciar que los polos de lazo cerrado tienen aproximadamente el mismo término de amortiguamiento como se predijo previamente en el análisis. La dinámica de lazo cerrado de la

inclinación tiene los mismos polos de lazo cerrado pero con la diferencia de que los ceros de lazo cerrado son los mismos que los ceros de lazo abierto del ángulo de inclinación.

$$\frac{\psi(s)}{R_\theta(s)} = \frac{29.67s(s+1.532)}{s^2 + 9.673s + 59.64(s^2 + 9.648s + 128.6)}$$

El controlador CE2000 ha sido empleado para obtener los resultados experimentales que se muestran abajo en la Figura 14. El tiempo de muestreo es $T_s=50\text{ms}$.

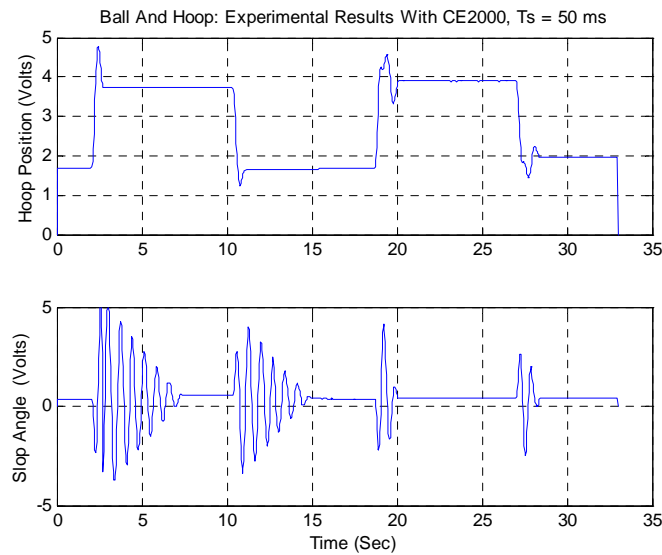


Figura 13. Resultados experimentales que muestran el aumento en los valores en el control proporcional de la inclinación.

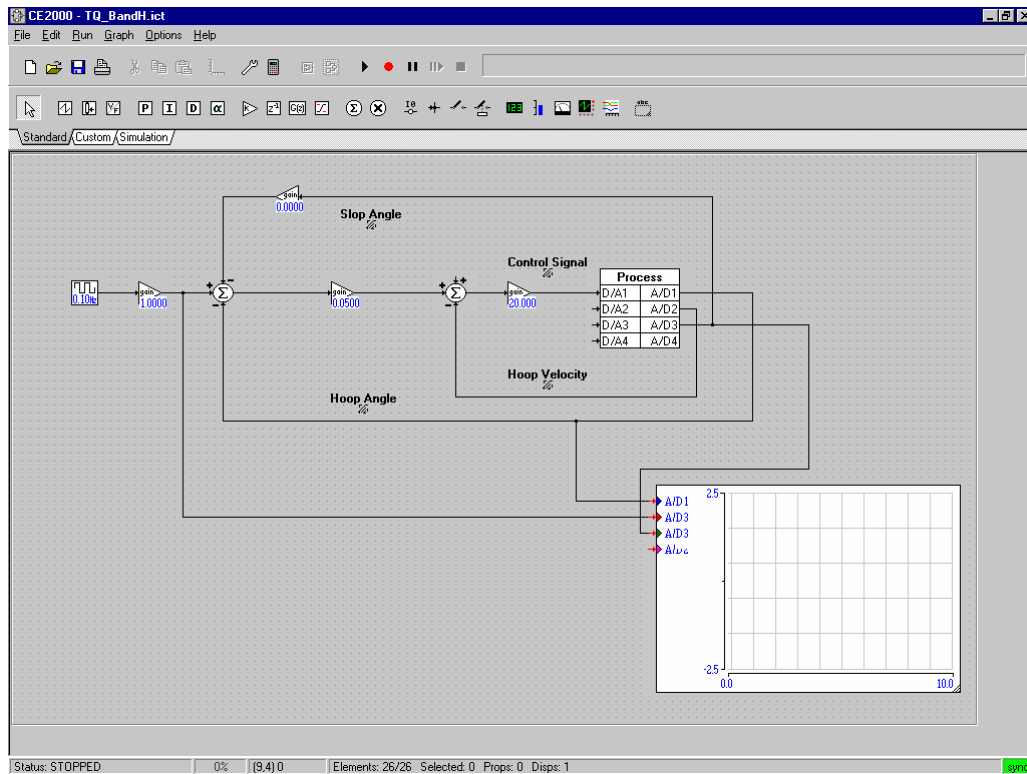


Figura 14. Controlador CE2000 usado en el trabajo experimental.

7. Software de diseño y simulación.

7.1. Código para Matlab del modelo del sistema de pelota y aro.

```

%
% Definición de los parámetros del modelo de pelota y aro en el sistema CE109
%
bm = 0.1;      % estimación del coeficiente de fricción en la rotación del aro.
bb = 1.67e-6; % medido
la = 1.6e-3;   % la es  $M*(R^2+Ri^2)/2$  y puede ser calculado a partir del radio exterior del aro (R)
                % y el radio interior (Ri) así como la masa del aro (M), que es aproximadamente 0.1kg

R = 0.085;    % 20cm diámetro del aro (aproximado)
r = 0.0091;   % 2cm diámetro de la pelota (aproximado)
m = 0.032;    % masa de la pelota (aproximada)
lb = 2*m*r^2/5; % lb se calcula de  $2*m*r^2/5$  usando el radio (r) y la masa de la pelota (m)

g = 9.81;     % gravedad
%
% Definición del modelo de estados – ecuaciones completas.
%
M = [la+m*(R-r)^2, -m*(R-r)^2/R;
     -m*(R-r)^2/R, lb/r^2 + m*((R-r)/R)^2];
D = [bm, 0;
     0, bb/r^2];
K = m*g*[(R-r), -(R-r)/R;
          -(R-r)/R, (R-r)/R^2];
B = [1; 0];
%
% Conformando las ecuaciones de estado.
%
a = [zeros(2,2), eye(2,2); -inv(M)*K, -inv(M)*D]; % ver el artículo Pelota y Aro 1.
b = [zeros(2,1); inv(M)*B]; % ver el artículo Pelota y Aro 1.
c = eye(4,4); % las salidas del modelo son todos los estados del sistema ( nótese que la velocidad de la inclinación
no esta disponible en el equipo real.)
d = zeros(4,1); % el vector de entrada u es el torque del motor.
%
% Conformando el objeto del espacio de estados del sistema de pelota y aro para ser utilizado posteriormente en
los % modelos de Matlab y Simulink.
BandHModel=ss(a,b,c,d);

```

7.2. Código para Matlab para calcular K_p y K_v .

```

%
%Archivo M para calcular Kp y Kv en tiempo continuo del sistema de pelota y aro
%con ganancias nominales en el sensor.
%Ganancia de lazo abierto de la velocidad del motor
Km=1/0.031;
%Ganancia del sensor de posición
Kt=5.72;
%Ganancia del sensor de velocidad
Kw=0.032;%
%Ganancia del sensor del ángulo de inclinación.
Kslop=14.32;
%Constante de tiempo nominal del motor.
tau=1;
%
%Respuesta deseada de lazo cerrado.
wn=2*pi*1.5;
zet=1;
%Ganancias de posición y velocidad
Kv=(2*zet*wn*tau-1)/(Km*Kw);
Kp=tau*wn*wn/(Km*Kv*Kt);

```

```
['Kp=' num2str(Kp),' Kv=' num2str(Kv)]
```

```
s=tf('s');
```

```
Tloop=wn^2/(s^2+2*zet*wn*s+wn^2); %Dinámica del aro en lazo cerrado.
```

8. Palabras finales.

El sistema de pelota y aro es orgullosamente una de nuestras creaciones que ofrece una buena lección de dinámica de sistemas. Esperamos que este sistema sea útil para ayudarte a transitar caminos menos conocidos de la ingeniería de control.

Deseamos agradecer los comentarios que nos han enviado algunos estudiantes e ingenieros con referencia a nuestro juego de artículos sobre ingeniería de control y sus experiencias con el equipo de aprendizaje CE. Muy tristemente sabemos que no podemos responder preguntas generales sobre el contenido de los artículos a menos que exista un acuerdo previo con su organización. Para mas información acerca del sistema de pelota y aro CE109 consulta la pagina de Internet de educación y entrenamiento de TQ Ltd así como las ligas en nuestra pagina www.control-systems-principles.co.uk o simplemente escribe a info@tq.com. No tenemos una referencia bibliográfica acerca del sistema de pelota y aro, que es precisamente el porque estos artículos existen, pero podemos ofrecerte algunas otras referencias y el juego de video clips disponibles en nuestra pagina de Internet.

9. Referencias

[1] Readman, M. C., *Flexible Joint Robots*, CRC Press 1994

[2] Wellstead, P. E., The Ball and Hoop System, *Automatica*, Vol. 19, No. 4, pp. 401-406, 1983

[3] Tan, H., Chang, J., Chaffee, M. A., *Practical Motion Control Modelling and PI Design*, Proc ACC, Chicago, June 2000