

## SISTEMA DE BALANCIN Y PELOTA: CONTROL ROBUSTO

Marco Antonio Pérez Cisneros\* y Mark Readman<sup>+</sup>

\*División de Electrónica y Computación, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México.

<sup>+</sup>Científico visitante, Control Systems Principles.

RESUMEN: Este artículo pertenece a la serie de notas de aplicación en modelado y control de sistemas que han sido creadas por “Control Systems Principles” para ilustrar los principios básicos de la teoría de control. Dichos fundamentos incluyen algunos sistemas genéricos y métodos que son comunes en todas las áreas del desarrollo tecnológico y la industria. Estas notas de aplicación buscan explicar dichos sistemas y sus principios de una manera clara y fácil de entender. Por tanto las notas describen primero las características mas importantes de un sistema, como funciona y finalmente como puede ser controlado. Diferentes sistemas en tiempo real son utilizados para demostrar la viabilidad de los algoritmos de control. Dichos sistemas han sido diseñados por nuestro fundador Prof. Peter Wellstead y son manufacturados por “TQ Education & Training Ltd” bajo la línea CE. Cuando es posible, las notas de aplicación incluyen también los resultados de los experimentos utilizando estos sistemas. En particular, esta nota de aplicación presenta la aplicación de los principios de control robusto en el sistema de balancín y pelota.

### 1. ¿Que discutimos en esta nota de aplicación?

Debido a que solamente un ejemplo de aplicación muy sencillo fue estudiado en la nota de aplicación sobre el sistema de balancín y pelota, esta nota ha sido escrita para ofrecer mas detalles sobre el diseño del controlador para este sistema. Esta nota de aplicación discute sobre los métodos más populares de control robusto y su uso para el caso particular del sistema de balancín y pelota. La metodología de diseño utiliza la técnica de McFarlane-Glover para conformar un lazo de control robusto. Esta técnica resulta en controladores que maximizan la tolerancia en lazo cerrado a la incertidumbre del factor co-primo. Se ha discutido que el modelado incierto vía factorización de valores co-primos es un método práctico para modelar incertidumbre. Dado que el sistema de balancín y pelota contiene algunas incertidumbres, puede esperarse buenos resultados de la aplicación del método de McFarlane-Glover en este sistema.

### 2. Sistema de control mediante la conformación del lazo robusto.

En un sistema de una entrada, una salida, (SISO por sus siglas en ingles), un controlador basado en la conformación del lazo puede ser implementado como se muestra en la figura 1. El diseño del controlador robusto  $K_R(s)$  se basa en la planta conformada que se señala con la línea roja punteada. Básicamente todos los esfuerzos de diseño son destinados a escoger un pre-compensador  $W(s)$  para alcanzar las especificaciones deseadas de rendimiento. El diseño del controlador robusto  $K_R(s)$  se basa en la planta ponderada  $PW$ . El controlador entonces se implementa como se muestra entre la línea negra punteada en la Figura 1.

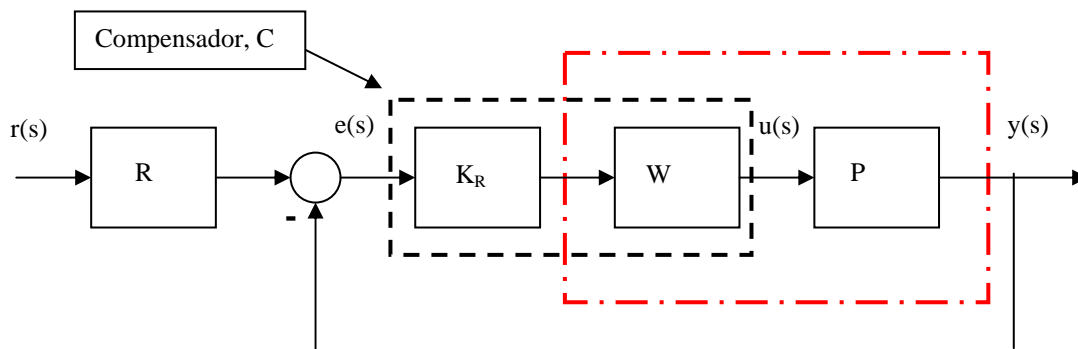


Figura 1. Sistema de control de conformación del lazo.

En la figura,

$r(s)$  = señal de referencia.

$e(s) = r(s) - y(s)$  señal de error.

$u(s)$  = salida del controlador y entrada a la planta = ángulo de la barra.

$y(s)$  = salida de la planta = posición de la pelota.

$P(s)$  es la planta, por ejemplo el sistema de balancín y pelota.

$W(s)$  es un pre-compensador

$K_R(s)$  es el controlador robusto,  $K(s) = W(s) K_R(s)$  es el controlador completo

$R(s)$  es un pre-filtro para la señal de referencia.

### 3. El modelo del sistema de balancín y pelota.

Como se explica en la primera nota de aplicación acerca del sistema de balancín y pelota: Principios, el experimento ideal se modela como el clásico doble integrador:

$$P(s) = \frac{V_x(s)}{V_\theta(s)} = \frac{K_{bb}}{s^2} \quad K_{bb} \approx 0.63$$

Las variables  $V_x(s)$  y  $V_g(s)$  son respectivamente el voltaje del sensor de posición de la pelota y el voltaje suministrado al servo mecanismo del ángulo de la barra. El valor de  $K_{bb}$  aquí es el valor medido que se obtiene del experimento. Nótese que el valor de  $K_{bb}$  difiere un poco del valor usado en la primera nota de aplicación, por que otro equipo ha sido utilizado. Esta variación es normal debido a las diferentes tolerancias que existen en la construcción del experimento. No existen dos equipos que sean perfectamente idénticos.

### 4. Explicación de los ejemplos.

El rendimiento del controlador será ilustrado utilizando ejemplos de la conformación del lazo robusto en el sistema de balancín y pelota. La aplicación utiliza diferentes funciones de ponderado o adición de pesos, pero siguiendo el mismo método. Todos los controladores son implementados utilizando el CE2000 software y su interfase de tiempo real para habilitar la comunicación con el entrenador de balancín y pelota CE106. Los resultados de los experimentos se importan a MATLAB para ser graficados mientras que el diseño de los controladores fue realizado también en MATLAB utilizando el código listado al final de esta nota de aplicación. Esperamos que la información en esta nota pueda demostrar como el software de control CE2000 puede ser utilizado para la implementación en tiempo real mientras que MATLAB para el diseño y la presentación grafica.

### 5. Ejemplos utilizando una función de pesos constante

#### Ejemplo 1: $W(s)=5$ .

El pre-compensador más simple es una ganancia constante. Con  $W(s) = 5$  la frecuencia de cruce es aproximadamente de 2 rad/s. Nótese que el rango de caída en la frecuencia de cruce es -40 db/década, que es mas alto de lo deseado. Específicamente, lo deseado es tener una frecuencia de cruce similar pero con un rango menor de descenso en la frecuencia de cruce.

Aplicando el método de diseño de McFarlane-Glover obtenemos  $\gamma = 2.6131$  como el valor optimo. Esto indica una buena relación entre el objetivo y la magnitud de frecuencias Bode alcanzada. También indica que el sistema de lazo cerrado tolerara aproximadamente un 33% de la incertidumbre de los factores co-primos. El controlador robusto de estabilización (obtenido usando el código MATLAB mostrado al final de esta nota) es entonces:

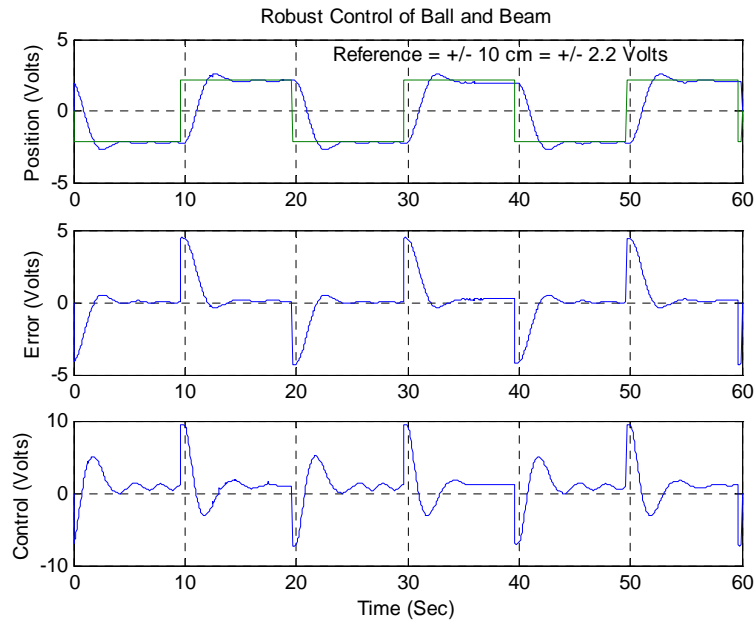
$$K_R = 30.322 \frac{(s + 0.7307)}{(s + 9.28)(s + 6.362)}$$

con una ganancia DC de 0.3753. Nótese que el controlador es estable con mínima fase y estrictamente propio. El controlador es implementado en tiempo discreto con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0.05$  seg. El controlador digital se obtiene agregando el retenedor de orden cero (ZOH, por sus siglas en ingles) y discretizando el controlador de tiempo continuo definido antes y una función de pesos. El controlador de tiempo discreto es entonces:

$$K_R(z) = \frac{1.048z^{-1} - 1.009z^{-2}}{1 - 1.356z^{-1} + 0.4574z^{-2}}$$

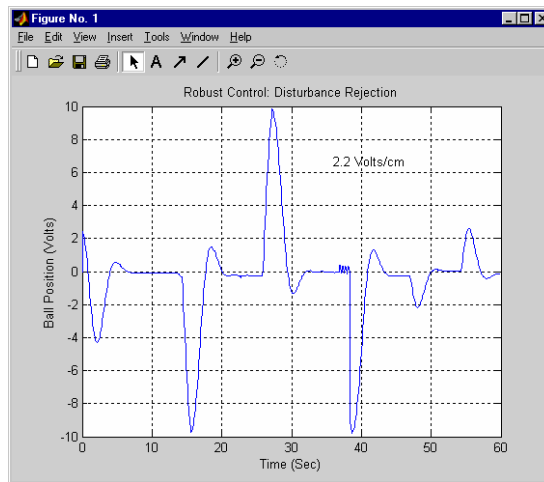
y  $W(z) = 5$ .

La respuesta al impulso del controlador robusto se muestra en la figura 2. El sobretiro es aproximadamente de 20% y el error en estado estable  $|e(t)| < 0.1v$ . Esto es equivalente a un error máximo de 0.45 cm en la barra.



**Figura 2. Resultados del control robusto de conformación de lazo utilizando un pre-compensador de ganancia constante.**

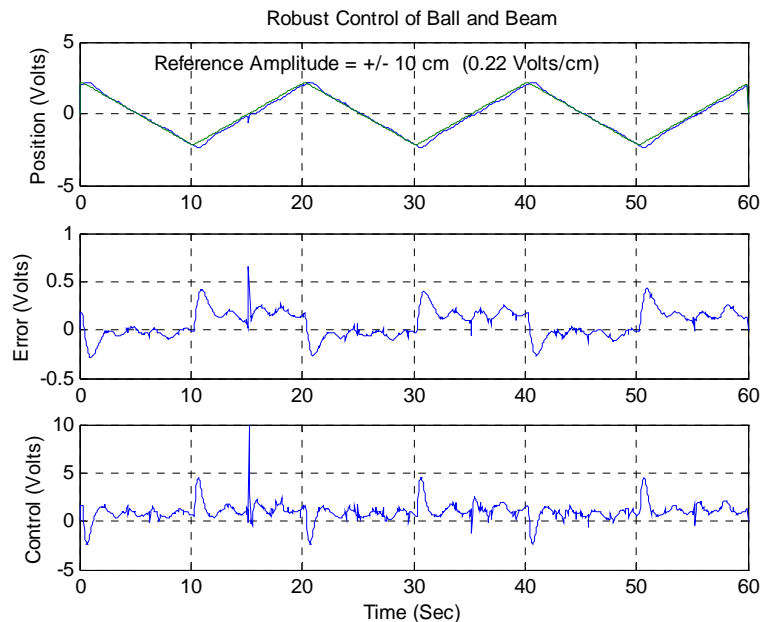
La respuesta a las perturbaciones del controlador robusto se muestra en la figure 3 de abajo. La referencia es cero y la perturbación es generada manualmente empujando la pelota fuera de la posición de estado permanente.



**Figura 3. Resultados de la anulación de perturbaciones utilizando el control robusto de conformación de lazo con una ganancia constante en el pre-compensador.**

### Ejemplo 2, Seguimiento de una señal rampa.

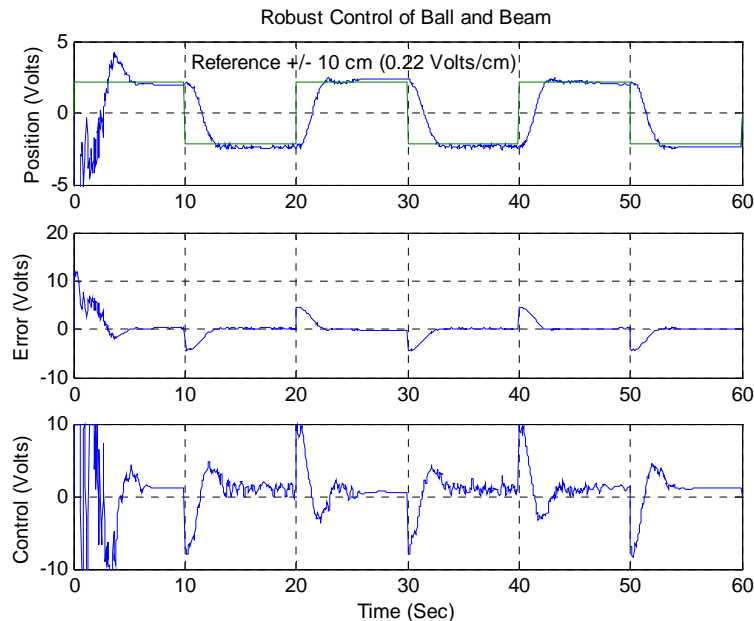
Gracias al doble integrador, el sistema es tipo dos lo que significa que puede seguir una señal rampa de entrada con cero error en estado estable. La habilidad de la pelota para seguir dicha entrada rampa se muestra en la figura 4. En práctica, la fricción de rodado de la pelota, otras no linealidades y el ruido del sensor afectan la habilidad de la pelota para seguir la referencia. Sin embargo, como se muestra en la figura 4, los resultados experimentales muestran que un seguimiento razonable de la entrada rampa puede ser alcanzado por el sistema.



**Figura 4. Resultados del seguimiento de una señal rampa de entrada utilizando el control robusto de conformación de lazo con una ganancia constante en el pre-compensador.**

### Ejemplo 3. Resultados experimentales con dos pelotas en la barra.

Este es un experimento divertido que tiene un interesante e inesperado resultado. Dos pelotas se colocan en la barra, una a cada extremo. El controlador inicia su funcionamiento y después de un comienzo muy ruidoso, las dos pelotas se sincronizan, realizando movimientos para acercarse una a otra y luego se mueven juntas en la barra. La respuesta al escalón es un poco más amortiguada que con una sola pelota debido al incremento de la fricción generado por las dos pelotas en movimiento. Sin embargo, no es sencillo de analizar el porque las pelotas se juntan y se mueven sincronizadamente. Los resultados de este experimento se muestran en la figura 5.



**Figura 5. Resultados de las dos pelotas en la barra utilizando el control robusto de conformación de lazo con una ganancia constante en el pre-compensador.**

### 6. Función de pesos en Adelanto Ejemplo 4: $W(s)=5*(s+1) / (0.3*s+1)$ .

Como en el caso de una ganancia constante la función de pesos se configura para obtener una frecuencia de cruce alrededor de 2 rad/s. Sin embargo nótese que el rango de caída en la frecuencia de cruce es de aproximadamente 20 db/década. Esperamos que el sistema con conformación del lazo tenga una frecuencia similar de cruce.

La aplicación del método de diseño de McFarlane-Glover resulta en una Gamma óptima de 2.110. Nótese que dicho valor es un poco menor que el valor en el ejemplo previo por que el compensador de adelanto ha reducido la pendiente en la caída alrededor de la frecuencia de cruce, por lo que el controlador robusto no tendrá que trabajar extra para conformar el lazo como es deseado. El sistema de lazo cerrado tolera aproximadamente 42% de la incertidumbre del factor co-primo. Usando el código de MATLAB que se muestra al final de esta nota, el controlador robusto de estabilización puede ser expresado como:

$$K_R = 31.1919 \frac{(s + 3.523)(s + 0.6338)}{(s + 0.9933)(s^2 + 22.82s + 146.1)}$$

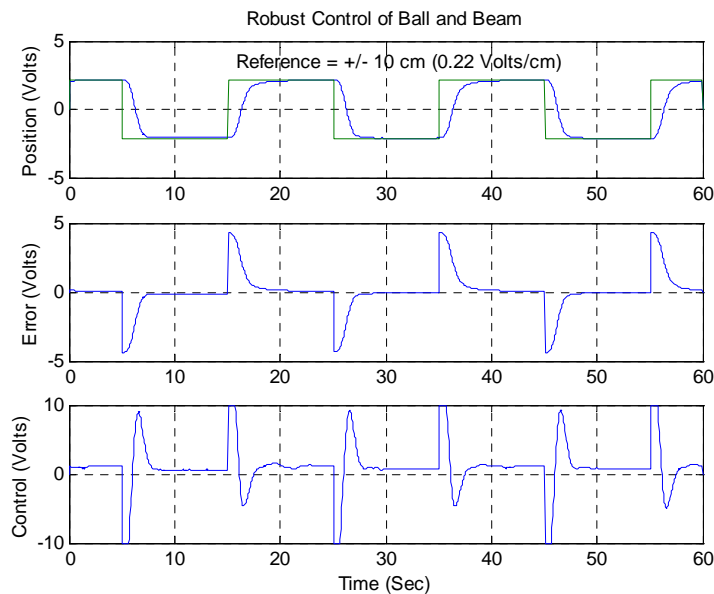
Con la ganancia directa de 0.4802. El orden del controlador se ha incrementado por que la función de pesos es de primer orden, por lo que el controlador es estable, de mínima fase y estrictamente propio.

El controlador es implementado en tiempo discreto con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0.05$  segundos. La función de transferencia presentada arriba es discretizada junto con la función de pesos. El controlador y dicha función pueden ser expresados entonces como:

$$K_R(z) = \frac{0.9601z^{-1} - 1.733z^{-2} + 0.7779z^{-3}}{1 - 2.06z^{-1} + 1.374z^{-2} - 0.304z^{-3}}$$

$$W(z) = 16.66 \frac{1 - 0.9539z^{-1}}{1 - 0.8465z^{-1}}$$

Los resultados experimentales se muestran abajo en la figura 6. La señal del actuador se satura causando un efecto de amortiguamiento en la posición de la pelota.

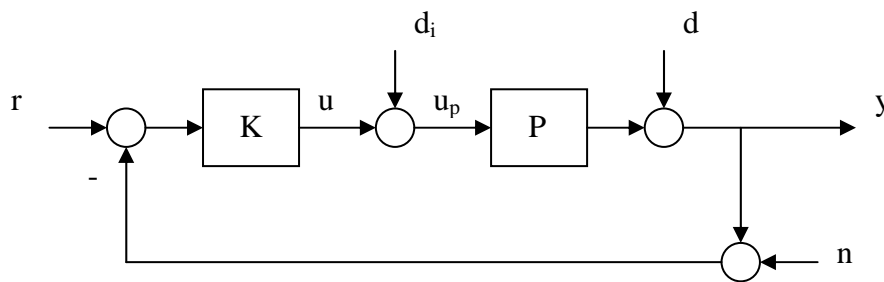


**Figura 6. Resultados utilizando el control robusto de conformación de lazo con el pre-compensador en adelante.**

## 7. Funciones de sensibilidad.

En el código MATLAB al final de esta nota, se calculan las funciones de sensibilidad para los sistemas de lazo cerrado. Dichas funciones de transferencia determinan la función de lazo cerrado. Con referencia a la figura 7, las funciones son:

1. La sensibilidad en la perturbación de entrada ( $S_{io}$ , por sus siglas en ingles), describe como la salida del sistema y responde a las perturbaciones  $d_i$ , que se suman a la señal de control,  $u$ .
2. La sensibilidad de control ( $S_{uo}$ , por sus siglas en ingles), describe como la salida del controlador,  $u$ , responde a perturbaciones  $d$ , o a ruido en las mediciones,  $n$ , que es sumado a la salida del sistema,  $y$ .
3. La función de sensibilidad complementaria ( $T_o$ ), que describe como la salida del sistema y, responde a la medición del ruido,  $n$ , que se suma a la salida del sistema. (Lo que también puede ser visto como la función de transferencia de lazo cerrado para un precompensador unitario  $R$ ).
4. La sensibilidad nominal ( $S_o$ ).



**Figure 7. Diagrama de lazo cerrado.**

La sensibilidad es empleada para evaluar el rendimiento del sistema de lazo cerrado como se describe en el libro de Graham Goodwin y sus colegas (ver las referencias en la sección final). Para el sistema de balancín y pelota, la sensibilidad de control y la sensibilidad complementaria son de particular interés por el ruido asociado con la medición de la posición de la pelota. Lo ideal es tener una señal de control y una medición de la posición insensible al ruido en las mediciones así como también una buena respuesta en el seguimiento. Se dice que el método de McFarlane-Glover implícitamente minimiza dichas funciones de sensibilidad, por lo que esperamos buenos resultados, por lo menos, mejores que usando solamente un simple adelanto de fase o control proporcional-derivativo o de retroalimentación de estado. Todas las funciones de sensibilidad se relacionan para definir un compromiso en el diseño. Dicho compromiso en este caso es entre una buena respuesta en el seguimiento y un aceptable rechazo del ruido.

## 8. Implementación en CE2000.

Los ejemplos de control robusto han sido implementados usando el software CE2000 que cuenta con una interfase de tiempo real que conecta el software directamente a la planta de balancín y pelota. La figura 8 muestra la implementación gráfica de la función de pesos con ganancia constante. En la figura, el objeto  $K_r(z)$  es el compensador y el bloque marcado como “process” es la conexión a la interfase externa del CE2000. Nota la constante que se resta de la posición de la pelota en el diagrama, cuyo propósito es compensar el componente de DC o desplazamiento del ruido en el sensor. Por cierto que este valor tiende a variar un poco para cada construcción del sistema. El ruido del sensor es entonces modelado como  $y_m(t) = y(t) + y_n(t) + y_{dc}(t)$ , donde  $y(t)$  es la medición verdadera mientras que  $y_n(t)$  así como  $y_{dc}(t)$  son el promedio y la componente de DC en el ruido del sensor respectivamente.

## 9. El código MATLAB usado en los ejemplos.

La lista de referencias dada en la parte final de esta nota describe el diseño de controladores robustos usando el método de McFarlane-Glover. El listado para MATLAB presentado a continuación fue usado para obtener los parámetros del controlador en la implementación en CE2000 mostrada anteriormente.

```
%Conformando el lazo robusto.
%Controlador para el sistema de balancín y pelota.
%Conformación estrictamente propia del lazo. D=0

s=tf('s');

%Modelo nominal del sistema (;otro modelo deberá ser escrito aquí!)
Kbb=0.66;
plant=Kbb/s^2;
pss=ss(plant);
[A1 B1 C1 D1]=ssdata(pss);

%Dos diferentes funciones de pesos.
```

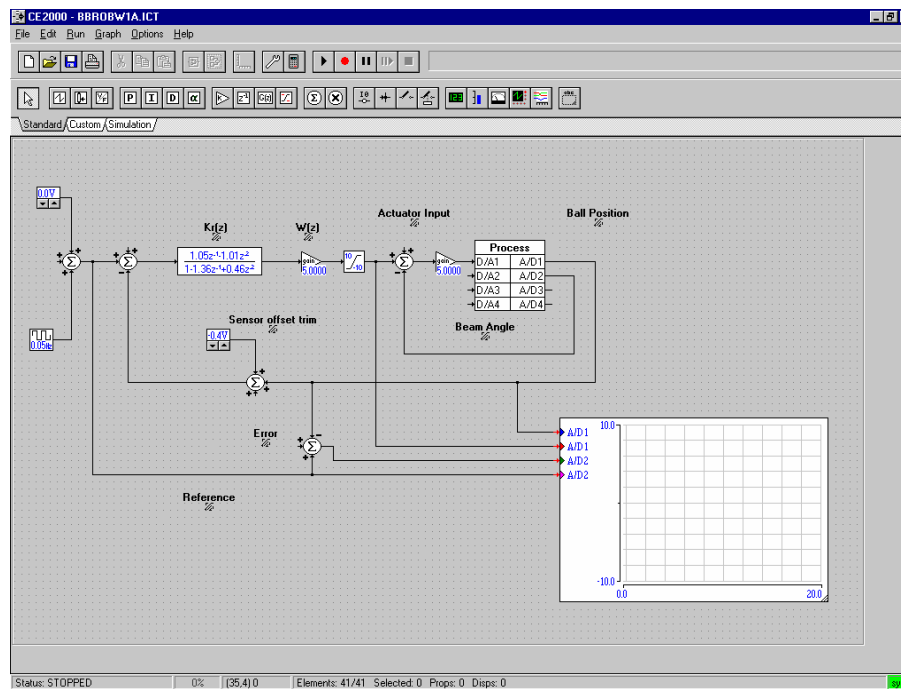
```

%W1=tf(5); %Ganancia constante
%W1=5*(s+1)/(0.3*s+1); %Comp Adelantado

%Conformación del lazo utilizada
loopss=pss*W1;
[A B C D]=ssdata(loopss);
%
%Resolviendo las ecuaciones de Ricatti
x=care(A,B,C'*C);
z=care(A',C',B*B');
%
%Calcula gamma
gamo=sqrt(1+max(eig(x*z)));
%
%Usa una Gamma sub-optima para el diseño 10 % más grande que lo usual
ten=1.1;
gam=ten*gamo;
R=eye(size(z*x))-(eye(size(z*x))+z*x)/gam^2;
%
%observador
L=B'*x;
K=inv(R)*z*C';
Ao=A-K*C;
%
%controlador (A,B,C,D)
Ac=A-B*L-K*C;
Cc=L;
Dc=0;
Bc=K;
%
%controlador robusto
comp=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
loop1=plant*W1*comp;
looplss=ss(loop1);
%
%Funciones de sensibilidad
T=minreal(feedback(loop1,1)); % T sensibilidad complementaria
So=minreal(feedback(1,loop1)); % So es la sensibilidad
Su=minreal(comp*W1*S); % Su es la sensibilidad de control
Si=minreal(plant*S); % Si sensibilidad de la perturbacion de entrada
ltiview('sigma',T,So,Su,Si)
%
%Control digital
Ts=0.05;
W1d=c2d(W1,Ts);
[num den]=tfdata(W1d,'v');
filt(num,den,Ts);
compd=c2d(comp,Ts);
[num den]=tfdata(compd,'v');
compz=filt(num,den,Ts);

```





**Figura 8. Implementación en el software CE2000 del control robusto de conformación de lazo con un pre-compensador constante.**

## 10. Palabras finales.

Esperamos que nuestra exposición acerca de los sistemas de balancín y pelota y los algoritmos de control robusto haya sido clara para ti. Pedimos disculpas por adelantado por que no podemos contestar tus preguntas o dudas sobre detalles en el contenido de estas notas a menos de que tengamos un acuerdo con tu organización. El código MATLAB que se presenta solo se ha incluido con propósitos de ilustración y no para uso profesional. Para más información sobre el sistema de balancín y pelota, consulta la pagina de Internet de TQ, utiliza las ligas de interés en nuestro sitio Web [www.control-systems-principles.co.uk](http://www.control-systems-principles.co.uk), o escribe directamente a TQ en el correo electrónico: [info@tq.com](mailto:info@tq.com). Para aprender más sobre control robusto, existen muchas referencias acerca de la técnica de McFarlane-Glover, entre las cuales podemos citas las siguientes:

- 1). McFarlane D.C. and Glover K., *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factorization Factor Plant Descriptions*. Springer 1989. Esta referencia viene directamente de los creadores de la técnica de conformación del lazo. Es muy claro con ejemplos interesantes para demostrar el método.
- 2) Paattilammi J., and Makila P. M., *Fragility and Robustness, A case study on paper machine head box control*. Control Systems Magazine. Feb 2000. Este artículo discute los detalles de implementación del método de McFarlane-Glover y en particular la importancia de la fragilidad del controlador.
- 3) Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E., *Control System Design*. Prentice Hall, 2001. Un buen libro de texto en teoría de control con numerosas notas de aplicación de buena calidad. Consulta esta referencia en especial para una explicación de las funciones de sensibilidad.
- 4). Glad, T., and Ljung, L., *Control Theory Multivariable and Nonlinear Methods*, Taylor and Francis, 2000. Una referencia completa en teoría de control que incluye un capítulo sobre la conformación del lazo. Finalmente no olvides el Internet y sus buscadores con palabras clave que puedan soportar tu búsqueda, como por ejemplo: control robusto, conformación de lazo robusto, etc.